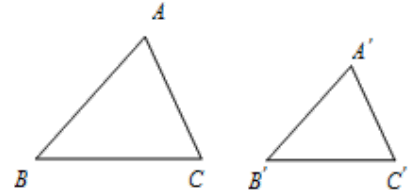


第2讲 相似三角形的基本模型

知识回顾：

1. 相似三角形的定义：_____相同的两个三角形叫做相似三角形；如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ；
2. 相似三角形的判定：_____、_____分别相等、_____对应成比例、_____对应成比例且_____相等。
3. 相似三角形的性质：_____相等，_____成比例（这个比称为_____），两个三角形的周长等于_____，面积的比等于_____；



一、A字模型

基础模型：

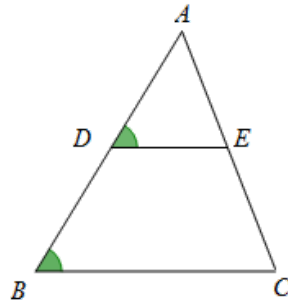


图1

如图，已知 $DE \parallel AB$ ，则_____ $\sim$ _____，从而_____ = _____。

变式模型：

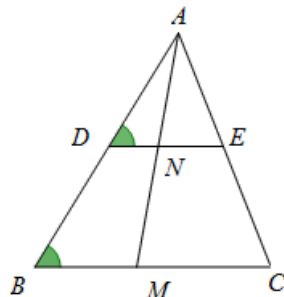


图3

反A字模型：

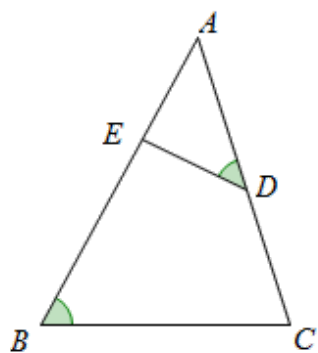
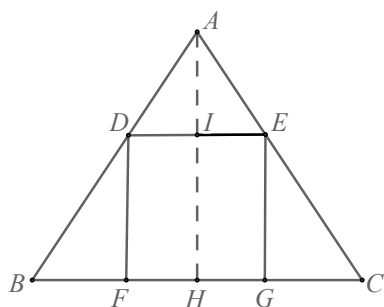


图1

图1中, $\angle ADE = \angle B$, 则 _____ $\sim$ _____, _____.

三角形内接矩形:

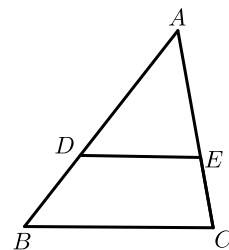


如图, 在 $\triangle ABC$ 内部有一个矩形 $DEGF$, 易得 _____ $\sim$ _____,
 $\therefore$ _____ (相似三角形的对应高线成比例)。

🧠 举个“栗”子

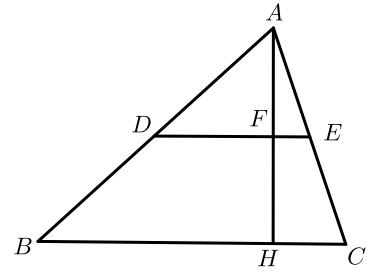
栗子1

- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, DE 分别交 AB , AC 于点 D , E . 若 $AD = 3$, $BD = 2$, $BC = 6$, 求 DE 的长.



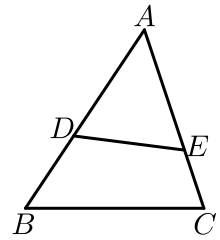
栗子2

- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D , E 分别是边 AB , AC 的中点, 高 AH 交 DE 于点 F , 若 $AH = 2$, 则 AF 的长为 _____.



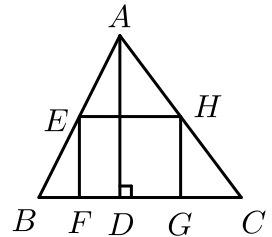
栗子3

3. 若 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，且 $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$ ，若四边形 $BCED$ 的面积是2，则 $\triangle ADE$ 的面积是_____。



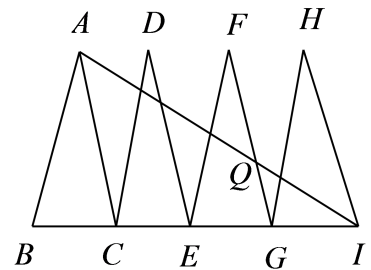
栗子4

4. 如图，矩形 $EFGH$ 内接于 $\triangle ABC$ ，且边 FG 落在 BC 上。若 $BC = 3$ ， $AD = 2$ ， $EF = \frac{2}{3}EH$ ，那么 EH 的长为_____。



独步天下1

5. 如图，已知 $\triangle ABC$ ， $\triangle DCE$ ， $\triangle FEG$ ， $\triangle HGI$ 是4个全等的等腰三角形，底边 BC ， CE ， EG ， GI 在同一条直线上，且 $AB = 2$ ， $BC = 1$ ，连接 AI ，交 FG 于点 Q ，则 $QI =$ （ ）。



A. 1

C. $\frac{\sqrt{66}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{61}}{6}$

D. $\frac{4}{3}$

二、8字模型

基础模型：

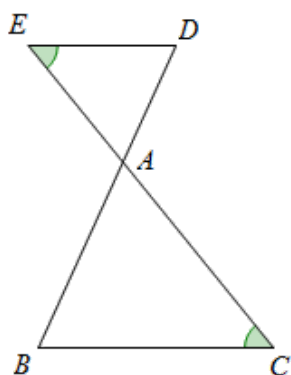


图2

如图，已知 $DE \parallel AB$ ，则_____ $\sim$ _____，从而_____。

变式模型：

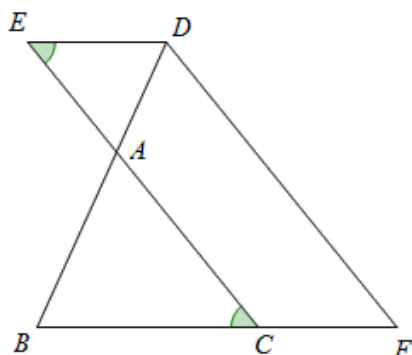


图4

反“8”字模型：

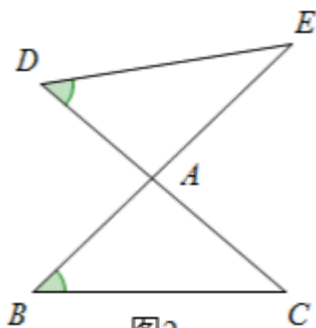


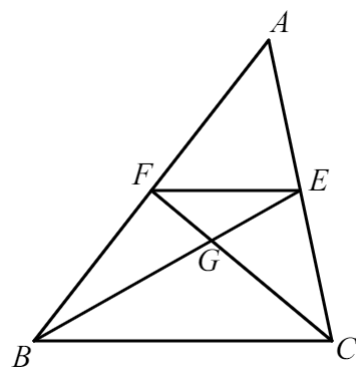
图2

图2中， $\angle B = \angle D$ ，则_____ $\sim$ _____，_____。

栗子5

6.

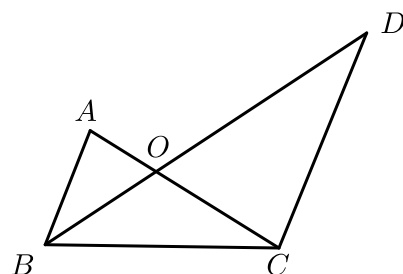
如图所示，已知点 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 中 AC 、 AB 边的中点， BE 、 CF 相交于点 G ， $FG = 2$ ，则 CF 的长为（ ）。



- A. 4 B. 4.5 C. 5 D. 6

栗子6

7. 如图， BO 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，延长 BO 至点 D 使得 $BC = CD$ 。



- (1) 求证： $\triangle AOB \sim \triangle COD$ 。
 (2) 若 $AB = 2$ ， $BC = 4$ ， $OA = 1$ ，求 OC 长。

三、 子母模型与射影定理

共角共边型模型（子母型）：

两个三角形不仅一个角相等，而且有一条边也相等，在加上另一角相等或夹等角的两组对应边成比例可得到相似。公共边（或等边）将成为某两边的_____。

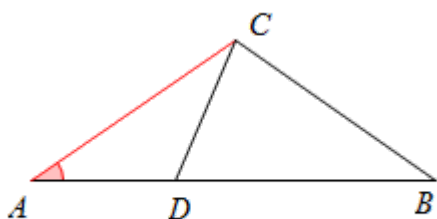


图1

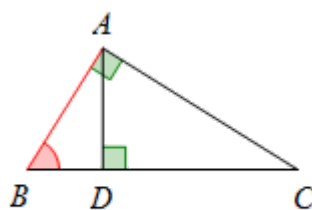


图2

如图1，红色边 AC 和红色角 $\angle A$ 是 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 的公共角和公共边，再找到一组角等或一组边成比例就可以证明两个三角形相似。

如图2，是将图1特殊化后的子母型模型——双垂直模型。

！ 结论：

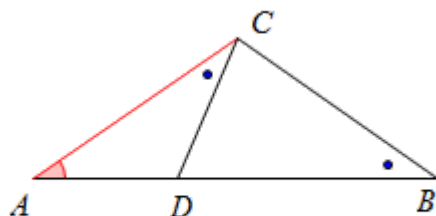


图1

如图1， $\angle ACD = \angle B$ ，则 _____ $\sim$ _____，_____, 即_____。

注意：

由 $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ ，即 $AC^2 = AD \cdot AB$ 可知，_____ AC _____ 等于 AC 的_____即 AB 、 AD _____。

思考：

如图2，你能验证一下在下图中的子母型模型中，“公共边的平方=两条对应边的乘积”这个结论吗？

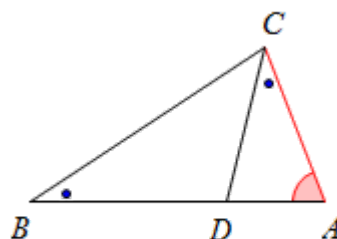


图2

射影定理

双垂直模型：

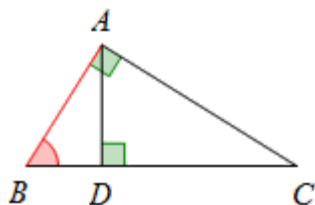


图2

如图2， $\angle BAC = \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ ，则 _____ $\sim$ _____ $\sim$ _____
 _____ $\sim$ _____，_____, 即_____
 _____ $\sim$ _____，_____, 即_____

_____，_____，即_____

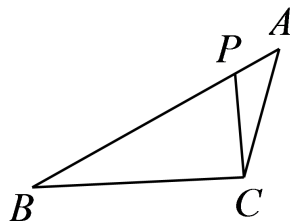
同时利用等面积可知：_____

！ 注意：

射影定理的内容是在双垂直模型中通过相似的性质推导出来的，定理的内容在选填中可以帮助我们快速得到答案，但在几何证明题目中想要应用定理内容，必须通过相似证明之后才能使用。

栗子7

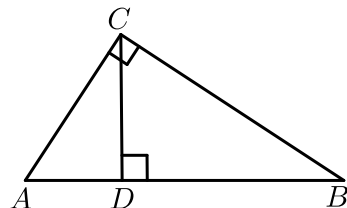
8. 如图，已知是 P 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，则在下列四个条件中，不能作为判定 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 相似条件的是（ ）。



- A. $\angle ACP = \angle B$ B. $\angle APC = \angle ACB$
 C. $\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB}$ D. $\frac{CP}{BC} = \frac{AC}{AB}$

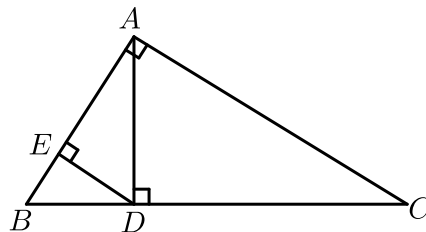
栗子8

9. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是边 AB 上的高，若 $AC = 4$ ， $AB = 10$ ，则 AD 的长为（ ）。



- A. $\frac{8}{5}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. 3

10. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD \perp BC$ 于 D ， $DE \perp AB$ 于 E ，若 $AD = 3$ ， $DE = 2$ ，则 AB 、 AC 的长分别为（ ）。

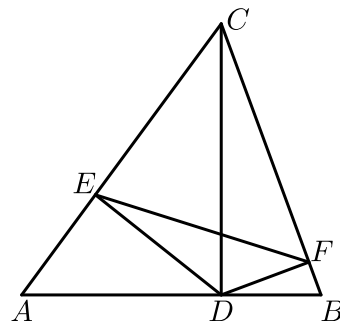


- A. $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ ， $\frac{9}{2}$
 B. $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ ， $\frac{21}{2}$

- C. $\frac{9\sqrt{5}}{5}, \frac{9\sqrt{5}}{2}$
 D. $\frac{9\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{15}}{5}$

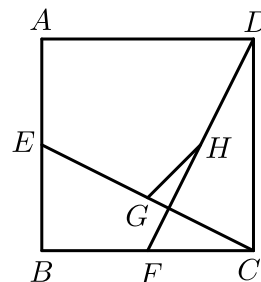
11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CD \perp AB$ 于点 D ， $DE \perp AC$ 于点 E ， $DF \perp BC$ 于点 F 。求证：

$$\triangle CEF \sim \triangle CBA.$$



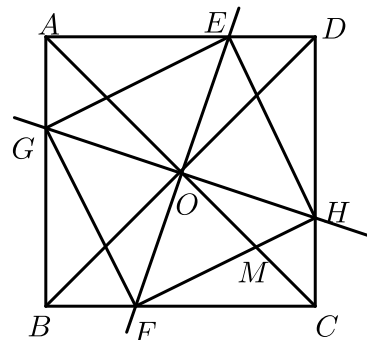
独步天下2

12. 如图，在边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别是边 AB, BC 的中点，连接 EC, FD ，点 G, H 分别是 EC, FD 的中点，连接 GH ，则 GH 的长度为 _____。



独步天下3

13. 如图，已知正方形 $ABCD$ ， O 为对角线 AC 与 BD 的交点，过点 O 的直线 EF 与直线 GH 分别交 AD, BC, AB, CD 于点 E, F, G, H 。若 $EF \perp GH$ ， OC 与 FH 相交于点 M ，当 $CF = 4$ ， $AG = 2$ 时，则 OM 的长为 _____。



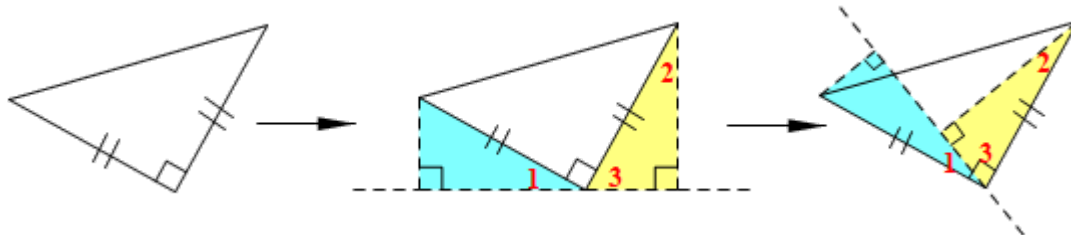
四、一线三等角模型

1. 一线三垂直模型

知识回顾：

只要出现等腰直角三角形，可以过直角点作一条直线，然后过 45° 顶点作该直线的垂线，构造三垂直模型。必有如下全等三角形：

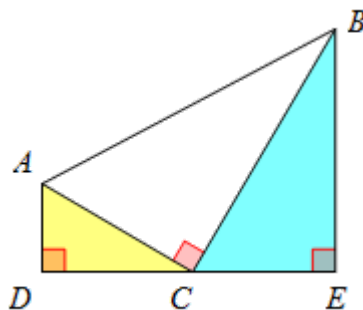
经典模型：



一线三垂直相似模型

根据上面的证明，你能试着证明下图中两个三角形的关系吗？

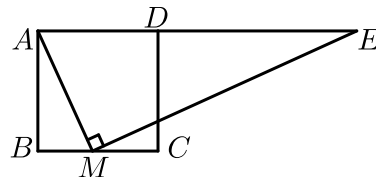
已知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $AC \neq BC$ ， $AD \perp DE$ 于点 D ， $BE \perp DE$ 于点 E 。



🍌 举个“栗子”

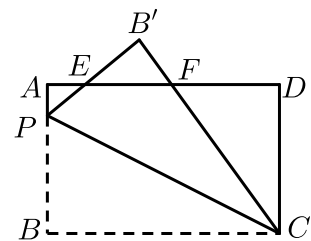
栗子9

14. 如图，正方形 $ABCD$ 中， M 为 BC 上一点， $ME \perp AM$ ， ME 交 AD 的延长线于点 E ，若 $AB = 12$ ， $BM = 5$ ，则 DE 的长为 _____。



独步天下4

15. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 8$ ，点 P 在 AB 上， $AP = 1$ 。将矩形 $ABCD$ 沿 CP 折叠，点 B 落在点 B' 处。 $B'P$ 、 $B'C$ 分别与 AD 交于点 E 、 F ，则 $EF =$ _____。

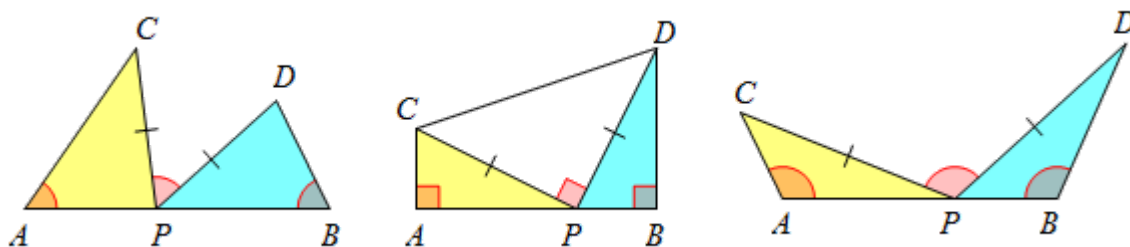


2. 一线三等角模型

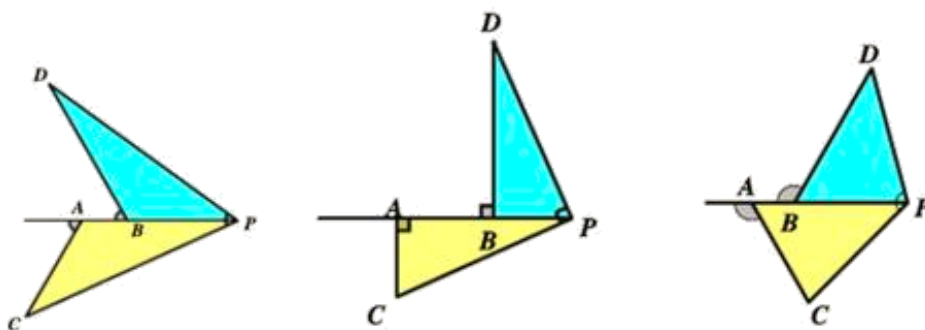
知识回顾：

只要在同一条直线上出现三个角相等，一般都可以构造全等三角形解决问题。

经典模型：



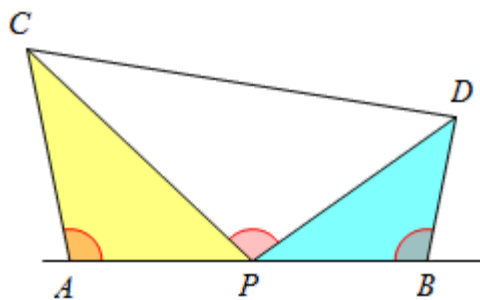
如图，若 $CP = DP$



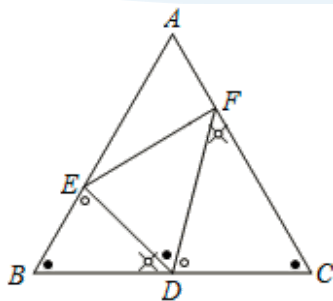
一线三等角相似模型

根据上面的证明，你能试着证明下图中两个三角形的关系吗？

已知 $\angle CAP = \angle CPD = \angle PBD$ ，且 $PC \neq PD$ 。



以等腰三角形为背景的“一线三等角”相似模型：

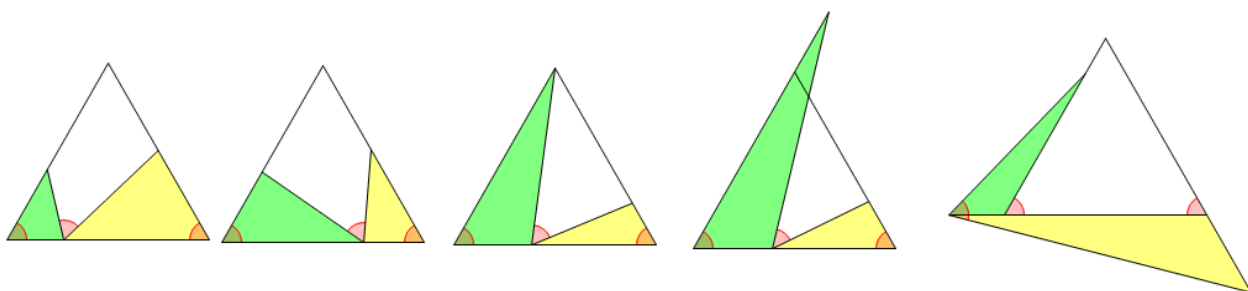


(1) 如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle B = \angle EDF = \angle C$, 则_____ $\sim$ _____.

(2) 特别地, 若点 D 是 BC 的中点, 那么还有_____ $\sim$ _____ $\sim$ _____.

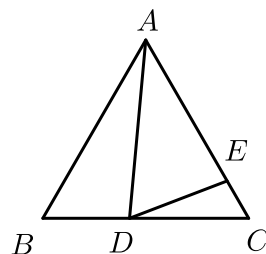
证明:

经典图形:



栗子10

16. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上一点, E 为 AC 边上一点, 且 $\angle ADE = 60^\circ$, $BD = 3$, $CE = 2$, 则等边 $\triangle ABC$ 的边长为_____.



独步天下5

17. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 D 、 E 分别在 BC 、 AC 上, 且 $\angle ADE = 60^\circ$, 若 $\triangle ABC$ 的边长为6, $CD = 2BD$, 则 AD 的长为_____.

